Platon och de irrationella talen

Aron Bodelsson

1. Platons *Timaios*

I vad som anses som en av Platons sena dialoger, *Timaios*, finns det en utförlig beskrivning av universum. Specifikt så finns där en utläggning om materiens minsta beståndsdelar. Den fysik som där presenteras bär spår av såväl Empedokles som Demokritos. Från Empedokles tas idén om de fyra elementen: jord, eld, vatten och luft; från Demokritos tas idén om att materian har minsta beståndsdelar som är odelbara. Men hos Platon är dessa minsta beståndsdelar inte av en sort utan av två. Det är hos Platon i sista hand två olika trianglar som bygger upp materian. De har det gemensamt att de är rätvinkliga, dvs. en av de tre vinklarna är 90 grader. Den ena triangeln är rätvinklig och likbent. Den andra är en oliksidig triangel som, om man ställer två bredvid varandra, bildar en liksidig triangel. Varför väljer Platon dessa två trianglar? Det låter han oss inte riktigt veta. Timaios säger bara:

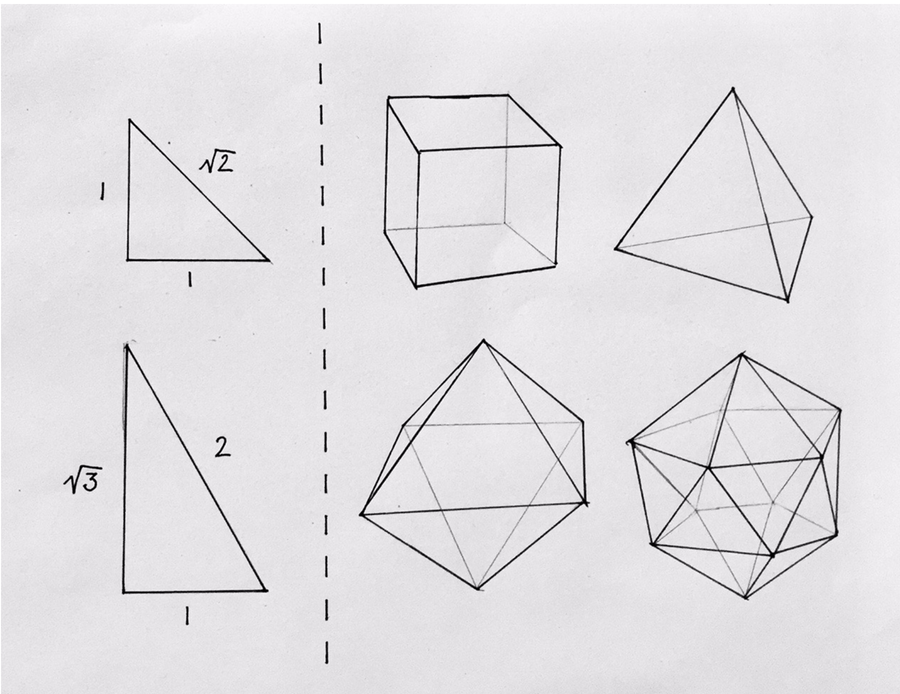
> Det skulle leda för långt att förklara varför, men om någon vederlägger detta och klarlägger att det inte förhåller sig så tillerkänner vi honom priset utan strid. (Platon 2006, Bok 4, s. 464)

Men av konstruktionen av trianglarna följer att de har ytterligare en egenskap gemensam, nämligen att de båda kommer att ha en sida vars längd motsvaras av ett irrationellt tal. Karl Popper argumenterar i essän ”Plato and Geometry” för att detta är motivet till att låta trianglarna se ut på detta sätt.[1] Vad är ett irrationellt tal? Det är ett tal som inte kan uttryckas med hjälp av heltal eller en relation mellan heltal. Det kan alltså inte skrivas som en kvot. Och om man vill skriva ett irrationellt tal på decimalform så blir det en oändlig följd av tal. Det mest kända exemplet är kanske pi, cirkelns omkrets, som börjar med 3,14… men aldrig tar slut. För de två trianglar Platon väljer ut så ger Pythagoras sats att längden på hypotenusan i den likbenta triangeln är roten ur 2, som är ett irrationellt tal; för den oliksidiga triangeln kommer den längsta

1. Essän är ursprungligen ett appendix till *The Open Society and Its Enemies* men återfinns också i *The World of Parmenides: Essays on the Presocratic Enlightenment* (1998).

Filosofisk tidskrift 2022 nr 4, 19–29

sidan vara roten ur 3, också det irrationellt. Att trianglarna har en sida som är irrationell kan också formuleras som att de har sidor som är inkommensurabla. Det finns alltså ingen gemensam enhet i vilken båda kan uttryckas. Popper menar att Platon genom postulerandet av dessa trianglar som byggstenar i universum försöker hitta en väg ut ur en kris som uppstått just genom upptäckten av de irrationella talen. Det är en kris som går tillbaka till pythagoréerna.



Till vänster ses de två trianglarna med en sida som är irrationell. Till höger syns de fyra formerna som konstrueras av de två trianglarna, och som i sin tur bygger upp de fyra elementen i universum. Kuben (8 sidor) konstrueras genom att varje sida bildas av att två likbenta trianglar sätts samman (och bildar en kvadrat). De andra tre formerna, tetraedern (fyra sidor), oktaedern (8 sidor) och ikosaedern (20 sidor), konstrueras genom att varje sida bildas av att två oliksidiga trianglar sätts samman (och bildar en liksidig triangel). Elementet jord består av kuber, elementet eld av tetraeder, elementet luft av oktaeder och elementet vatten av ikosaeder. Denna konstruktion får till följd att eld, jord och luft kan ombildas till varandra men inte ombildas till jord och att jord inte kan ombildas till något annat element.

2. Pythagoras och de irrationella talen

Pythagoras är, som många av försokratikerna, en närmast mytisk figur. Väldigt lite är känt om honom. Han ska ha levt först på Samos, en ö utanför den turkiska kusten, där han föddes omkring 570 f. Kr., och sedan ha flyttat till Kroton i södra Italien. Han dog ca 490 f. Kr. Det finns inga skrifter bevarade av honom, och det verkar heller inte som att han skulle ha skrivit något. En stor del av hans berömmelse kommer från att han har fått ge namn åt det geometriska teoremet om relationen mellan de tre sidorna i en rätvinklig triangel: Pythagoras sats. Men att han skulle vara upphovsman till detta teorem är mycket osannolikt, och frågan är om han ens kände till beviset för det. Den första skriftliga källan som anger Pythagoras som upphovsman till teoremet är från ca 500 e. Kr. då Proklos i sina kommentarer till Euklides *Elementa* säger:

> Om vi lyssnar till dem som ägnar sig åt att undersöka antik historia, så finner vi att de hänvisar detta teorem tillbaka till Pythagoras. De påstår också att han offrade en oxe vid denna upptäckt.[2]

Detta är alltså skrivet ca 1000 år efter att Pythagoras levde och kan därmed inte tillskrivas så stor tillförlitlighet. Vi vet att babylonierna kände till teoremet före grekerna och kände till metoder för att ta fram tripplar av siffror som ger upphov till rätvinkliga trianglar. Däremot producerade de inget bevis för teoremet. Det är mycket troligt att Pythagoras på samma sätt kände till teoremet utan att ha känt till något bevis för det. En annan matematisk upptäckt som har förknippats med Pythagoras eller Pythagoras följare är de irrationella talen. Proklos, exempelvis, ger Pythagoras äran även för att ha inlett studiet av irrationella tal. Och Iamblichos berättar flera historier om vad som skulle ha drabbat medlemmar i Pythagoras sällskap när de upptäckt de irrationella talen (eller själva tagit åt sig äran för någon upptäckt, trots att all sådan ära skulle tillfalla Pythagoras). Enligt Iamblichos ska Hippasos ha drunknat till havs som ett straff från gudarna, inte för att han tog åt sig äran för något, utan endast för att han upptäckte de irrationella talen. Men vad är det med de irrationella talen som motiverar ett sådant straff från gudarna? Låt oss se på hur Aristoteles beskriver pythagoréerna i *Metafysiken* bok 1, del 5:

> [D]e så kallade pythagoréerna ägnade sig åt matematik, och de var först med att utveckla denna vetenskap; och genom sina studier så leddes de

2. Se artikeln om Pythagoras från *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Alla engelska citat är översatta till svenska av mig.

> till övertygelsen att matematikens principer var de principer som styrde allt. Och eftersom talet är den första av dessa principer ... så antog de att talens element är alltings element, och att hela universum var en proportion eller ett tal. (Aristoteles 1933)

Vi ser tydligt att enligt Aristoteles så menar pythagoréerna att det är talen som är det grundläggande i matematiken. Matematikens principer var i sin tur styrande för hela kosmos, och universum självt ska enligt Aristoteles ha förståtts som ett tal.

Före upptäckten av de irrationella talen trodde man antagligen att det inte fanns några andra tal än de rationella talen. Man trodde alltså att alla tal gick att föra tillbaka på heltal eller en relation mellan dessa. Detta är egentligen ett intuitivt mycket rimligt antagande. Om man väljer ut ett godtyckligt litet segment på tallinjen, så kommer detta segment fortfarande att innehålla oändligt många rationella tal. Tallinjen verkar egentligen helt mättad med de rationella talen, och det kan nästan tyckas märkligt att det skulle finnas plats för några andra tal. Men det var alltså detta som man upptäckte. Olika geometriska förhållanden, som relationer mellan sidor i rätvinkliga trianglar, kan uttryckas med hjälp av heltal. Men det finns undantag. Exempelvis så kan inte relationen mellan sidorna och diagonalen i en kvadrat uttryckas som en relation mellan heltal: de är inkommensurabla. Om sidorna i kvadraten är 1 så kommer diagonalen, enligt Pythagoras sats, vara $\sqrt{2}$. Men $\sqrt{2}$ kan inte uttryckas med hjälp av heltal eller rationella tal. För Aristoteles är detta redan ett etablerat faktum, men han skriver i *Metafysiken* om hur detta faktum borde framstå för dem som ännu inte är bekanta med det:

> Tillägnandet av kunskap bör åstadkomma ett sinnestillstånd som är motsatt det som rådde vid början av våra efterforskningar ... För det måste vara häpnadsväckande för dem som ännu insett orsaken, att det skulle finnas något som inte kan mätas, inte ens av en minsta möjliga enhet. (Aristoteles 1933, 983a11)

Och enligt Popper så innebar denna upptäckt inget mindre än en kris för pythagoréerna. Popper skriver:

> Upptäckten att kvadratroten av två är irrationell (som antyds av Platon i *Den större Hippias* och i *Menon*) förstörde det pythagoreiska programmet att aritmetisera geometrin, och därmed också, verkar det som, vitaliteten hos hela den pythagoreiska rörelsen. (Popper 1998, s. 253)

Upptäckten av de irrationella talen innebär att geometrin inte kan reduceras till aritmetik. Och i den mån geometrin är den gren av matematiken som beskriver rummet och dess egenskaper, och i förlängningen kosmos, så innebär existensen av de irrationella talen att tanken att kosmos i grunden styrs av heltalen, vilket verkar ha varit den pythagoreiska dogmen, blir en osannolik idé. Det är mot bakgrund av detta som det blir begripligt att man kan straffas med döden av gudarna för att ha upptäckt de irrationella talen. Enligt Popper så innebar det också början på slutet för pythagorismen som rörelse.

3. Efter krisen

Popper tänker sig att atomismen delvis är en fortsättning på pythagorismen eftersom den har det gemensamt med pythagorismen att den tror att världen går att reducera till diskreta entiteter. Och därmed har atomisterna samma problem med de irrationella talen som pythagoréerna.

> Den pythagoreiska teorin, med sina punktdiagram innehåller utan tvekan en förlaga till en primitiv atomism. I hur stor grad Demokritos atomteori var inspirerad av pythagoréerna är svårt att avgöra. Dess främsta influenser kom säkerligen från den eleatiska skolan: från Parmenides och Zenon. (Popper 1952, s. 140)
>
> Men den kanske mest fascinerande aspekten i Demokritos teori är hans doktrin om kvantifieringen av rum och tid. Jag tänker då på doktrinen som diskuteras mycket just nu, att det finns ett minsta möjliga avstånd i rum och ett minsta möjliga intervall i tid (element av rum och tid, Demokritos *ameres,* alltså inte atomer). (Ibid., s. 144)

Enligt Popper så finns det alltså även en motsättning mellan atomism som förklaring av kosmos och upptäckten av de irrationella talen. Han hyser emellertid stor beundran för Demokritos som tänkare, och därför har han svårt att föreställa sig att Demokritos skulle ha förbisett detta. Därför menar han att de irrationella talen nog inte var kända för Demokritos.

> Huruvida Demokritos kände till [de irrationella talen] är osäkert. Jag lutar snarast mot åsikten att han inte gjorde det; och att titeln på Demokritos två förlorade verk, *Peri alogon grammon kai panton*, bör översättas *Om alogiska linjer och volymer*, och att dessa två böcker inte innehåller någon referens till problemet med de irrationella talen. Min tro att Demokritos

> inte kände till de irrationella talen är baserad på det faktum att det inte finns några spår av ett försvar för hans teori mot det fatala slag som den mottog från denna upptäckt. (Ibid. s. 145–46)

Enligt Diogenes Laertios ska Demokritos ha skrivit ett verk i två delar med titeln *Peri alogon grammon kai panton a b* och som i Daniel Grahams samling av försokratiska fragment översätts som *On irrational lines and solids 1, 2* alltså *Om irrationella linjer och solida kroppar 1, 2*.

I sin bok *The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry* från 1975 gör filosofen och matematikhistorikern Wilbur R. Knorr ett grundligt försök att spåra hur och när de irrationella talen upptäcktes i det antika Grekland. Han ser inte den motsättning mellan atomism och irrationella tal som Popper ser, och tar tvärtom den boktitel som Diogenes Laertios nämner som intäkt för att Demokritos var bekant med de irrationella talen. Som absolut senaste datum för upptäckten sätter han 410 f. Kr. med motiveringen att matematikern Theodoros, bekant från Platons dialog *Theaitetos*, var verksam som matematiker omkring 410–390 f. Kr. och gjorde framsteg kring teorin om de irrationella talen. Han tror inte att de irrationella talen kan ha varit kända så långt innan Demokritos var verksam eftersom vi inte ser några andra spår av dem i de försokratiska fragmenten. De irrationella talen var en fråga som intresserade Platon och Aristoteles mycket och det borde rimligtvis, menar Knorr, ha varit en fråga som även skulle ha intresserat exempelvis Zenon, så att han inte nämner dem borde tyda på att de ännu inte var kända. Man kan förvisso tänka sig att pythagoréerna skulle ha upptäckt dem tidigare och sedan hållit detta hemligt.[3] Men Knorr menar att det finns många tecken på att pythagoréernas lära var ganska spridd (såväl Xenophanes som Herakleitos verkar ha känt till den) så därmed kan idén om tystnadskulturen bland pythagoréerna vara överdriven. Men framförallt så borde de politiska omvälvningar som gjorde att pythagoréerna delvis splittrades som grupp på 500-talet ha gjort att en sådan upptäckt fått spridning. Emellertid tänker sig Knorr att det faktiskt var pythagoréer som var de som gjorde upptäckten. Han menar att man kan se spår hos pythagoréerna Filolaus och Eurytos[4] av att de faktiskt hade utvecklat den pythagoreiska filosofin mot bakgrund av de irrationella

3. En teori som har förts fram av exempelvis Paul Tannery, matematikhistoriker verksam i slutet av 1800-talet.

4. Eurytos var en elev till Filolaus och utvecklade en filosofi som låg nära sin lärares.

talens upptäckt. Filolaus ska ha fötts ca 470 f. Kr., alltså samtidigt som Sokrates men tio år före Demokritos. Han är den äldste pythagoré som vi har några bevarade fragment från, och troligen den första pythagoré som skrev något filosofiskt verk.[5] Vad kan man då se hos Filolaus som tyder på att han kände till de irrationella talen? Knorr menar att det är fragment 6 som ger en indikation om detta. Det lyder:

> Förvisso, talen är av två olika sorter, jämna och ojämna, och så en tredje sort som är en blandning av de två första, jämn-ojämn. Det finns många former av varje sort, och varje ting betecknar något av dem. (Graham 2010, s. 493)

Filolaus delar alltså in talen i tre sorter här, de jämna och ojämna, som är de egentliga talen, och så en tredje sort, de jämna–ojämna, som är en blandning av de andra. Hur ska man förstå det här? En hypotes som ligger nära till hands är att den tredje sorten, som inte är lika egentlig som de andra två, är de irrationella talen. Detta blir enligt Knorr rimligt om man ser på hur beviset som ges av Euklides för att det finns irrationella tal såg ut. I bok 10 av *Elementa* ger Euklides ett bevis för att diagonalen är inkommensurabel med sidorna i en kvadrat genom ett *reductio ad absurdum* där han visar att diagonalen i så fall måste vara både ett jämnt och ett ojämnt tal. Detta är också, enligt matematikhistorikern Bartel Van der Waerden, ett bevis som Aristoteles nämner flera gånger (Van der Waerden 1975, s. 110). Van der Waerden skriver även att:

> Pappus påstår att teorin om de irrationella talen startade i pythagoréernas skola, och deras teori om de jämna och ojämna talen gav dem verktygen för att bevisa att kvadratroten ur två var ett irrationellt tal. (Ibid.)

Van der Waerden drar slutsatsen att Euklides bevis kommer från pythagoréerna. Mot bakgrund av detta verkar Knorrs teori att det är de irrationella talen som Filolaus syftar på i fragment 6 sannolik. Man kan samtidigt inläsa en viss tvekan i fragmentet mot att inordna de irrationella talen bland de vanliga talen, och ändå är det anmärkningsvärt att Filolaus faktiskt erkänner de irrationella talen som tal. Trots att det alltså, enligt Popper, är just dessa tal som har rivit ner den pythagoreiska världsbilden.

Det är också intressant att se på några andra fragment hos Filolaus och notera den diskrepans som finns mellan å ena sidan Filolaus filosofi och å andra sidan pythagorismen som den framställs av Aristoteles. I

5. Se artikeln ”Philolaus” i Stanford Encyclopedia of Philosophy.

Aristoteles framställning av pythagoréerna så förfäktar de ståndpunkten att världen består av tal, att i princip allt är tal. Men hos Filolaus framträder talen ofta mer som en ordnande princip. Enligt Filolaus så består världen av *de obegränsade* och *de begränsande*, alltså sådant som är obegränsat och sådant som begränsar. Han menar att varken det ena eller det andra skulle kunna existera för sig. Han går inte in närmare på vad *de obegränsade* eller *de begränsande* skulle vara och han verkar anse att detta i sista hand inte går att få absolut kunskap om. I Fragment 3 skriver han:

> Angående natur och harmoni så ligger det till på följande vis, tingens essens, som är evig, och naturen själv, är tillgänglig för ett gudomligt men inte för ett mänskligt vetande; emellertid är det omöjligt att något av alla de ting som existerar och som vi har kunskap om skulle ha tillkommit om inte tingens essenser, dem från vilka världsordningen är uppbyggd, skulle existera. Dessa essenser är *de begränsande* och *de obegränsade*. (Graham 2010, s. 493, min kursivering.)

Han argumenterar alltså utifrån antagandena att det finns en värld och att vi har kunskap om världen. Då måste världen bestå av dessa två grundtyper menar Filolaus. Detta inskärps i fragment 4:

> Det skulle inte finnas något som har kunskap, om alla ting vore obegränsade. (Ibid.)

Från fragment 5 kan vi få en aning om talens roll i Filolaus kosmos:

> Och förvisso, alla ting som är föremål för vetande, har tal. För det är inte möjligt att något kan tänkas eller vara föremål för kunskap utan tal. (Ibid.)

Det finns en viss analogi mellan det begränsande i fragment 4 och talens roll i fragment 5. Båda fungerar som villkor för vetandet. Om Filolaus ansåg att talen var *de begränsande* kan vi inte veta. Men vi kan åtminstone se att för Filolaus så var inte talen världens innersta väsen. Man kan spekulera om huruvida denna splittring mellan talen och världen hade sitt ursprung i upptäckten av de irrationella talen. Vi har sett att denna upptäckt verkar ha uppfattats som hotfull av pythagoréerna enligt vittnesmål från antiken, och i modern tid har Popper menat att de irrationella talen innebär ett (tillfälligt) slut på den pythagoreiska världsbilden.[6] En läsning av Filolaus ger vid handen att Pop-

6. Pythagorismen växte sig stark igen under andra hälften av 400-talet f. Kr., inte minst inom Platons akademi. Detta har kallats för ny-pythagorismen. (Se artikeln ”Pythagoreanism”

pers ståndpunkt åtminstone behöver modifieras, kanske helt avfärdas. Kanske kan man tänka sig att de irrationella talen frambringade en viss ödmjukhet angående möjligheten till vetande hos pythagoréerna och en mindre dogmatisk hållning. En sådan ödmjukhet verkar manifestera sig i Filolaus kosmologi.

En pythagoré som kom efter Filolaus, och som också ska ha varit hans elev, var Archytas. Archytas var filosof och matematiker. Han var ungefär samtida med Platon men mer precisa uppgifter än så finns inte angående när han levde. Han var den första att hitta en lösning på frågan hur man kan dubblera en kub, alltså att utifrån en given kub hitta en kub med dubbelt så stor volym. Han var också en framstående politiker i Tarentum i södra Italien där han levde. Platon berättar i sjunde brevet om hur Archytas kom till hans undsättning när han hade hamnat i svårigheter i Syrakusa. Archytas lät skicka ett skepp så att Platon kunde ta sig därifrån. Man vet inte säkert om det fanns något filosofiskt inflytande mellan Platon och Archytas, men exempelvis uppdelningen i *Staten* av fem olika matematiska discipliner tros härröra från Archytas (Knorr 1975, s. 92). Det producerades en del falska verk i Archytas namn efter hans levnad men de enda filosofiska utsagor som tros komma från Archytas själv är fyra fragment. I ett av dem talar han om logistiken som den främsta av vetenskaper, och specifikt sätter han den framför geometrin. Det är svårt att avgöra exakt vad Archytas avser med ”logistik” men det är ett begrepp som används på flera ställen i Platons verk och där betyder det ungefär ”talteori” eller ”aritmetik”. Knorr skriver att Archytas tolkats som naiv i sin tanke om logistikens företräde framför geometrin. Denna kritik har utgått från en historieskrivning liknande Poppers där den grekiska matematiken först domineras av aritmetiken genom pythagoréerna och sedan, som en konsekvens av upptäckten av inkommensurabiliteten, vänder sig mot geometrin, framförallt manifesterat i Euklides *Elementa*. I detta perspektiv så blir Archytas en eftersläntrare som inte hänger med i matematikens utveckling. Men Knorr vänder sig mot den tolkningen. Archytas var enligt Knorr en av sin tids främsta matematiker som bidrog till utvecklingen att inkorporera de irrationella talen i matematiken. Här är fragmentet från Archytas:

---

i Stanford Encyclopedia of Philosophy.) Enligt Popper kan detta förklaras med att nya metoder inom matematiken gjorde de irrationella talen oproblematiska. Knorr menar för övrigt att de irrationella talen aldrig uppfattades som särskilt besvärliga av matematikerna, som fortsatte att arbeta som vanligt, de var snarare ett problem för filosoferna.

> Logistiken verkar vida överlägsen de andra konstarterna i fråga om visdom, och specifikt när det gäller att handskas med det den önskar på ett mer tydligt sätt än geometrin. Och i de avseenden som geometrin är bristfällig, så använder logistiken argument och fullbordar bevis; detta gör den också i fråga om undersökningen av former.

”Logistiken” här verkar betyda något snarlikt till ”matematisk logik”. Vad Archytas verkar säga här är att en geometri utan resonemang eller logik inte kan åstadkomma så mycket. I det avseendet föregriper Archytas här Euklides och hans deduktiva metod.

4. Avslutning

När man ser på den pythagoreiska filosofin på 400- och 300-talet f. Kr., alltså före och under Platons levnad, så verkar det mycket troligt att de irrationella talen här har utövat ett inflytande. Men inte på ett så entydigt sätt som Popper hävdar. Snarare än att ha inneburit slutet på pythagorismen som tankeriktning så verkar pythagoréerna ha antagit utmaningen som de irrationella talen ställde till deras filosofi. Popper menar att Platon skulle ha varit den förste som tänkte igenom konsekvenserna av inkommensurabiliteten (1952, s. 146), men snarare verkar han ha fortsatt på ett arbete som redan hade påbörjats av pythagoréerna själva.[7] Enligt Popper innebär Platons införande av trianglar som materians minsta beståndsdelar att ett skifte inleds från det aritmetiska till det geometriska, ett skifte som ska fullbordas av Euklides i hans *Elementa* och som sedan står som modell för vetenskapen i tusentals år, ända in i vår tid. Men skiftet från aritmetik till förmån för geometri måste nog sägas ha inletts redan hos Demokritos och hans atomlära. Och Poppers argumentation för att Demokritos atomlära är oförenlig med inkommensurabiliteten är inte så övertygande. Archytas å sin sida framstår som mycket modern och kan också tänkas ha inspirerat Pla-

7. Frågan om pythagoréernas inflytande på Platon har diskuterats mycket. I en biografi om Pythagoras från 900-talet e. Kr. så presenteras Platon som pythagoré och som en elev till Archytas. (Se artikeln ”Pythagoreanism” i Stanford Encyclopedia of Philosophy.) Aristoteles nämner på flera ställen pythagoréerna och Platon i samma mening. I A. E. Taylors kommentar till *Timaios* så presenteras huvudtesen som att: ”Timaios läror [i Platons *Timaios*] kan i detalj visas vara exakt vad vi skulle förvänta oss från en italiensk pythagoré under 400-talet f. Kr.” (ibid.). Platons dialog *Filebos* brukar pekas ut som en text där ett inflytande från Filolaus tankar om begränsare och obegränsade är tydligt. Enligt Diogenes Laertios ska Platon ha köpt en bok skriven av Filolaus, och även, efter Sokrates död, rest till södra Italien och träffat både Filolaus och ytterligare en elev till Filolaus vid namn Eurytos (Graham 2010, s. 489).

ton. För hur det än var med skylten framför Platons akademi som endast tillät de som var skolade i geometri att träda in, så var alltid dialektiken den första vetenskapen för Platon; precis som logistiken var mer grundläggande än aritmetik och geometri enligt Archytas.

Fallet med de irrationella talen verkar visa på ett mycket nära samband mellan den matematiska forskningen och filosofin. Detta finns det flera exempel på i historien. De två mest framträdande exemplen är kanske grundvalsforskningen inom matematiken i början av 1900-talet och upptäckten av infinitesimalkalkylen på 1600-talet. Dessa matematiska framsteg hade tydliga efterverkningar inom filosofin och var nog också redan på förhand problem som inte helt kunde skiljas från filosofin. Det är mindre känt att de irrationella talen var ett exempel på detta redan under antiken, vilket är särskilt intressant eftersom detta utspelar sig alldeles i filosofins begynnelse.

Litteratur

Aristoteles. (ca 350 f. Kr.) 1933. *Metaphysics*, vol. I, böcker 1–9. Övers. Hugh Tredennick. Loeb Classical Library 271. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Graham, Daniel W. 2010. *The Texts of Early Greek Philosophy*, del 1. Cambridge: Cambridge University Press.

Huffman, Carl A. 2005. *Archytas of Tarentum: Pythagorean, Philosopher and Mathematician King*. New York: Cambridge University Press.

Huffman, Carl A. 2006. ”Pythagoreanism”. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* URL: https://plato.stanford.edu/entries/pythagoreanism/ (hämtad 2018-11-09)

Huffman, Carl A. (2005) 2018. ”Pythagoras”. *Stanford Encyclopedia of Philosophy* URL: https://plato.stanford.edu/entries/pythagoras/ (hämtad 2018-11-09)

Huffman, Carl A. 2003. ”Philolaus”. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* URL: https://plato.stanford.edu/entries/philolaus/ (hämtad 2018-11-09)

Knorr, Wilbur R. 1975. *The Evolution of the Euclidian Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry.* Dordrecht: D Reidel Publishing Company.

Platon. (ca 360 f. Kr.) 1926. *Laws*. vol. I, böcker 1–6. Övers. R. G. Bury. Loeb Classical Library 187. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Platon. (ca 370 f. Kr.) 2006. *Skrifter*, bok 4. Övers. Jan Stolpe. Stockholm: Atlantis.

Popper, Karl R. 1952. ”The Nature of Philosophical Problems and Their Roots in Science”. I *The British Journal for the Philosophy of Science* 3, nr 10, s. 124–56.

Popper, Karl R. 1998. *The World of Parmenides: Essays on the Presocratic Enlightenment*. London: Routledge.

Van der Waerden, B. L. 1975. *Science Awakening*, vol 1. Övers. Arnold Dresden. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.