ERIC JOHANNESSON

# MONTY HALL-PROBLEMET

## 1. PROBLEMET

Föreställ dig följande spel. Du har tre oöppnade lådor framför dig. Exakt en av lådorna innehåller ett pris, men du vet inte vilken. Spelet går ut på att gissa vilken av lådorna det är. Spelet har tre moment:

1. Först väljer du en av de tre oöppnade lådorna.
2. När du gjort ditt val kommer en låda öppnas som uppfyller följande villkor:
   (a) du har inte valt den, och
   (b) lådan är tom.
   (Eftersom det bara finns ett pris är existensen av en sådan låda garanterad.)
3. När du har sett den tomma lådan öppnas, får du välja mellan de två oöppnade lådorna. Du får behålla innehållet i den låda du väljer.

Problemet är nu följande. Vi antar att du känner till spelets regler, samt att du vill ha priset. Dessutom antar vi att du i första momentet (även efter det att du har gjort ditt val) tror att alla tre lådorna har lika stor sannolikhet att innehålla priset. Låt *A* vara den låda du väljer i första momentet, låt *B* vara den låda som öppnas i andra momentet, och låt *C* vara den tredje lådan. I det sista momentet, bör du då välja *A* eller *C*?

Det numera klassiska svaret på den frågan är att du bör välja *C*. Det finns flera enkla och till synes bra argument för detta. För en översikt, se exempelvis Morgan et al. (1991). Ett argument som man ibland stöter på är följande: sannolikheten att *A* innehåller priset är från början ⅓, medan sannolikheten att *B* eller *C* innehåller priset är ⅔. Att *B* visar sig vara tom innebär, enligt detta resonemang, att sannolikheten för *C* blir ⅔, medan sannolikheten för *A* förblir ⅓. Således bör du välja *C*.

Men argumentet är ogiltigt. Samma typ av resonemang visar nämligen att du bör välja *A*. Ty sannolikheten att *C* innehåller priset är ju från början ⅓, medan sannolikheten att *A* eller *B* innehåller priset är ⅔. Att *B* visar sig vara tom skulle då, enligt samma typ av resonemang, innebära att sannolikheten för *A* blir ⅔, medan sannolikheten för *C* förblir ⅓.

*Filosofisk tidskrift* 2017 nr 2, 21–24

I själva verket följer det inte från ovanstående problembeskrivning att du rationellt sett måste välja $C$ i sista momentet (dvs. byta). Ytterligare ett antagande krävs, vilket vi nu ska visa. Antagandet ifråga är att, givet att du valt rätt låda i första momentet, så har de återstående två lådorna en sannolikhet att öppnas i andra momentet som är större än noll.

## 2. DEN KORREKTA LÖSNINGEN

Låt oss kalla lådorna 1, 2 och 3. För varje $n \in \{1,2,3\}$, låt $H$ beteckna händelsen att priset är i låda $n$, låt $V_n$ beteckna händelsen att du väljer låda $n$ i första momentet, och låt $E_n$ beteckna händelsen att låda $n$ öppnas i andra momentet. Antag att $A$ är lådan du väljer i första momentet, $B$ är lådan som öppnas i andra momentet, och $C$ är den tredje lådan. Eftersom du i första momentet, oavsett vilken låda du väljer, tror att alla lådorna har lika stor sannolikhet att innehålla priset, så gäller att

(1) $P(H_A|V_A) = P(H_B|V_A) = P(H_C|V_A) = ⅓$

Eftersom du känner till spelets regler gäller dessutom att

(2) $P(E_B|V_A \wedge H_C) = 1$

och att

(3) $P(E_B|V_A \wedge H_B) = 0$

Premisserna (1), (2) och (3) ger nu att

(4) $$P(H_A|E_B \wedge V_A) = \frac{P(E_B|V_A \wedge H_A)}{P(E_B|V_A \wedge H_A) + 1}$$

och att

(5) $$P(H_C|E_B \wedge V_A) = \frac{1}{P(E_B|V_A \wedge H_A) + 1}$$

För en härledning av (4) och (5), se (9) respektive (10) i Appendix.

Detta innebär att $P(H_C|E_B \wedge V_A)$, som är sannolikheten att vinna om du byter låda, kan anta vilket värde som helst mellan ½ och 1, beroende på värdet av $P(E_B|V_A \wedge H_A)$. I synnerhet, om $P(E_B|V_A \wedge H_A) = 1$, så gäller enligt (4) och (5) att $P(H_A|E_B \wedge V_A) = P(H_C|E_B \wedge V_A) = ½$, och då behöver du inte byta.

Vi ska nu visa att detta mycket väl kan vara fallet. Låt säga att lådan som öppnas i andra momentet gör det enligt exempelvis följande princip:

1. Om du har valt låda 1 och priset är i låda 1, så öppnas låda 2.
2. Om du har valt låda 2 och priset är i låda 2, så öppnas låda 3.
3. Om du har valt låda 3 och priset är i låda 3, så öppnas låda 1.
4. Annars öppnas den låda som du inte har valt och som inte innehåller priset (det finns då bara en sådan låda).

Denna princip vore helt klart förenlig med beskrivningen av spelet som gavs i inledningen. Anta att du av någon anledning tror att det är denna princip som gäller, och att $A = 1$, $B = 2$ och $C = 3$. Då blir $P(E_B|V_A \wedge H_C) = 1$ och därmed $P(H_A|E_B \wedge V_A) = P(H_C|E_B \wedge V_A) = \frac{1}{2}$.

Detta visar att du kan ha trosföreställningar som är förenliga med förutsättningarna och spelets regler som gör att du i *vissa* fall slipper byta. Det finns dock inga sådana trosföreställningar som gör att du i *alla* fall slipper byta. Det följer nämligen av (4) och (5) att

(6) $P(H_1|E_2 \wedge V_1) < P(H_3|E_2 \wedge V_1)$ omm $P(E_2|V_1 \wedge H_1) < 1$

och att

(7) $P(H_1|E_3 \wedge V_1) < P(H_2|E_3 \wedge V_1)$ omm $P(E_3|V_1 \wedge H_1) < 1$

Men eftersom $P(E_2|V_1 \wedge H_1) + P(E_3|V_1 \wedge H_1) = 1$, så gäller antingen att $P(E_2|V_1 \wedge H_1) < 1$ eller att $P(E_3|V_1 \wedge H_1) < 1$. Det betyder, enligt (6) och (7), att $(H_1|E_2 \wedge V_1) < P(H_3|E_2 \wedge V_1)$ eller $P(H_1|E_3 \wedge V_1) < P(H_2|E_3 \wedge V_1)$. Alltså måste du, oavsett vad du i övrigt tror, i något av fallen $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ eller $A = 1$, $B = 3$, $C = 2$ byta låda mellan första och sista momentet.

Slutligen gäller enligt (5) att

(8) $P(H_C|E_B \wedge V_A) = \frac{2}{3}$ omm $P(E_B|V_A \wedge H_A) = \frac{1}{2}$

Detta visar att standardlösningen, som säger att sannolikheten att gissa rätt om du byter låda är ⅔, endast gäller under antagandet att du tror på följande princip:

1. Om du har valt låda 1 och priset är i låda 1, så är det lika sannolikt att 2 öppnas som att 3 öppnas.
2. Om du har valt låda 2 och priset är i låda 2, så är det lika sannolikt att 1 öppnas som att 3 öppnas.
3. Om du har valt låda 3 och priset är i låda 3, så är det lika sannolikt att 1 öppnas som att 2 öppnas.

Detta antagande brukar emellertid inte ingå i framställningen av problemet.

## APPENDIX

Från (3) följer att $P(E_B \wedge V_A \wedge H_B) = P(E_B | V_A \wedge H_B) P(V_A \wedge H_B) = 0$, vilket tillsammans med (1) och (2) ger

$$(9) \quad P(H_A | E_B \wedge V_A) = \frac{P(H_A \wedge E_B \wedge V_A)}{P(E_B \wedge V_A)} =$$

$$\frac{P(H_A \wedge E_B \wedge V_A)}{P(E_B \wedge V_A \wedge H_A) + P(E_B \wedge V_A \wedge H_B) + P(E_B \wedge V_A \wedge H_C)} =$$

$$\frac{P(H_A \wedge E_B \wedge V_A)}{P(E_B \wedge V_A \wedge H_A) + 0 + P(E_B \wedge V_A \wedge H_C)} =$$

$$\frac{P(E_B | V_A \wedge H_A)\, P(H_A | V_A)\, P(V_A)}{P(E_B | V_A \wedge H_A) P(H_A | V_A) P(V_A) + P(E_B | V_A \wedge H_C) P(H_C | V_A) P(V_A)} =$$

$$\frac{P(E_B | V_A \wedge H_A)}{P(E_B | V_A \wedge H_A) + P(E_B | V_A \wedge H_C)} = \frac{P(E_B | V_A \wedge H_A)}{P(E_B | V_A \wedge H_A) + 1}$$

och

$$(10) \quad P(H_C | E_B \wedge V_A) = \frac{P(H_C \wedge E_B \wedge V_A)}{P(E_B \wedge V_A)} =$$

$$\frac{P(H_C \wedge E_B \wedge V_A)}{P(E_B \wedge V_A \wedge H_A) + P(E_B \wedge V_A \wedge H_B) + P(E_B \wedge V_A \wedge H_C)} =$$

$$\frac{P(H_C \wedge E_B \wedge V_A)}{P(E_B \wedge V_A \wedge H_A) + 0 + P(E_B \wedge V_A \wedge H_C)} =$$

$$\frac{P(E_B | V_A \wedge H_C)\, P(H_C | V_A)\, P(V_A)}{P(E_B | V_A \wedge H_A) P(H_A | V_A) P(V_A) + P(E_B | V_A \wedge H_C) P(H_C | V_A) P(V_A)} =$$

$$\frac{P(E_B | V_A \wedge H_C)}{P(E_B | V_A \wedge H_A) + P(E_B | V_A \wedge H_C)} = \frac{1}{P(E_B | V_A \wedge H_A) + 1}$$