Folke Tersman

Benacerrafs utmaning

1. INLEDNING

Enligt den platonska hållningen inom matematikens filosofi handlar matematiska påståenden om företeelser som finns oberoende av oss, som existerar bortom tid och rum och som vi inte står i några orsaksmässiga förbindelser till (tal, funktioner, mängder och så vidare). Hur kan man utifrån den synen förklara att vi ändå har kunskap om matematiska förhållanden? Vissa misstänker att det inte finns något bra svar på den frågan. Platonisternas antaganden verkar ju innebära att de matematiska realiteterna är mera hopplöst oåtkomliga för oss än Russells tekanna, och att våra matematiska uppfattningar därför, om de är korrekta, bara kan ses som tursamma gissningar. De menar även att avsaknaden av ett rimligt svar är ett skäl att överge platonismen. Resonemanget kallas ibland ”Benacerrafs utmaning” efter filosofen Paul Benacerraf som formulerade en version av det i sin välkända artikel ”Mathematical Truth”.

Det finns hållningar som är besläktade med platonismen inom andra filosofiska fält. Även andra företeelser antas nämligen, av en del filosofer, ha de kännetecken som enligt den platonska synen karakteriserar talen, såsom möjliga världar och moraliska och estetiska egenskaper (egenskapen att vara moraliskt rätt, egenskapen att vara vacker, och så vidare). Dessa hållningar sägs därigenom stå inför utmaningar som liknar Benacerrafs.

Huruvida Benacerrafs utmaning verkligen medför några problem för platonismen är omstritt. En del menar att den är en sorts skenproblem. Syftet med artikeln är att diskutera ett intressant försök att visa att så är fallet. Och även om en slutsats är att försöket misslyckas så är det lärorikt genom att det tvingar oss att klargöra vad utmaningen närmare bestämt går ut på. Den rekonstruktion jag därvid skall göra mynnar även ut i en annan slutsats. Enligt denna andra slutsats ger utmaningen inte, som förespråkare hävdat, upphov till en invändning som är separat från det mer välbekanta argumentet enligt vilket vi saknar skäl att tro på de ifrågasatta företeelserna då de inte förutsätts av den bästa förklaringen av något observerbart.

2. FIELDS VERSION

Många anser att Benacerrafs egen formulering av utmaningen är otillfredsställande eftersom den involverar en syn på kunskap som är uppenbart olämplig för matematiken och som kan ifrågasättas på oberoende grund. Han utgår nämligen från en kausal teori som explicit utesluter att vi har kunskap om sådant vi inte är orsaksmässigt relaterade till. En tidig förespråkare för denna syn var Alvin Goldman. Men inte ens han ansåg att den är lämplig när det gäller kunskap om annat än rent empiriska utsagor.[1] Idag har teorin få anhängare och även Goldman har övergivit den.

Det finns emellertid versioner av Benacerrafs utmaning som inte förutsätter den kausala teorin. Den mest kända har utarbetats av Hartry Field, och det är Fields version jag hädanefter skall koncentrera mig på.

Field undviker helt begreppet kunskap. Det är snarare våra matematiska föreställningars ”pålitlighet” (”reliability”) som en platonist måste kunna ge en förklaring till. Det platonisten närmare bestämt behöver kunna göra reda för är en sorts korrelation mellan de matematiska förhållandena och matematikernas (eller ”våra”, som jag fortsättningsvis kommer att skriva) föreställningar om dem, det vill säga varför schemat

Om vi accepterar ”p” så p

”(och en partiell men svåruttryckt omvänd variant av detta schema) gäller i nästan varje fall, då ’p’ ersätts med en matematisk sats”.[2]

Korrelationen innebär att våra matematiska föreställningar är mestadels sanna. Hur kan det komma sig? Det är den frågan platonisten, enligt Field, behöver kunna ge ett rimligt svar på. Det är alltså inte sanningen hos de påståenden som utgör innehållen i våra föreställningar som skall förklaras (varför $2 + 2 = 4$, till exempel) utan att vi begåvats med föreställningar på detta område som är mestadels sanna. Ibland uttrycker sig Field snarare så här: Det platonisten behöver kunna visa är att korrelationen (givet att den faktiskt föreligger) inte helst bör betraktas som resultatet av en ren slump eller ett sammanträffande.

Field anser att det i allmänhet är så att om det framstår som omöjligt att på ett rimligt sätt förklara pålitligheten hos våra föreställningar inom ett område så har vi skäl att uppge dem. Det är en tanke han illustrerat med ett exempel om en avlägsen by i Nepal. Anta att vi har vissa specifika uppfattningar om byn, som att ett udda antal invånare är födda på en fredag och att exakt tre bär namnet Sonam. Orsaken kan vara att vi pratat med någon som påstår sig ha levt i byn. Anta emellertid att det framgår att personen aldrig haft med byn att göra, samtidigt som alla andra tänkbara förklaringar till uppfattningarnas pålitlighet (som att informationen finns

[1] Goldman 1967, s. 357.
[2] Field 1989, s. 26.

i en bok vi råkat titta i som författats av en trovärdig journalist) också kan uteslutas. I så fall vore det korkat att hålla fast vid dem. I stället bör vi suspendera omdömet om bybornas antal och egenskaper.

Det är denna, generella, idé som är utgångspunkten för det argument mot platonismen som Field tänker sig att Benacerrafs utmaning potentiellt ger upphov till. De första stegen i argumentet kan formuleras så här:

1. Om vi är oförmögna även i princip att förklara pålitligheten hos våra föreställningar inom ett visst område på ett rimligt sätt så bör vi uppge dem.
2. Platonismen innebär att så är fallet när det gäller våra matematiska föreställningar.
3. Platonismen innebär därmed att vi bör uppge dessa föreställningar.

Det kunde vara frestande att fortsätta genom att hävda att platonismen således är falsk eftersom vi *inte* bör uppge våra matematiska föreställningar (då vi har goda skäl för dem). Men oavsett vad man vill säga om det resonemanget så är det inte Fields. För Field går med på att vi bör uppge våra matematiska föreställningar, åtminstone i den meningen att vi bör upphöra att tro att de påståenden som utgör deras innehåll är ”bokstavligt” sanna. Det är kärnan i hans ”fiktionalistiska” hållning rörande matematikens natur. Poängen är snarare att frilägga en spänning inom den platonska positionen. Att vara platonist är att anse att matematiska föreställningar postulerar objekt som existerar bortom tid och rum, och så vidare. Men det är också att anse att dessa företeelser verkligen finns och att *ha* (åtminstone vissa av) de föreställningar Field anser att vi bör uppge. Därmed kan man, genom att åberopa 1–3, hävda att problemet med platonismen är att en av dess komponenter undergräver en annan, och att positionen därför som helhet är orimlig. Tanken är alltså att argumentet fortsätter ungefär i den här stilen:

4. Platonismen innebär att platonismen bör uppges.
5. Alltså bör platonismen uppges.

Notera att det är rättfärdigandet hos platonismen som ifrågasätts genom detta argument snarare än dess sanning. Vi kan ju ha skäl att överge en position utan att den är falsk. Steget från 4 till 5 kan kanske tyckas problematiskt eftersom 5 inte följer från 4 i strikt mening. Men att tvingas inse att en teori man godtar är rättfärdigad bara om den är falsk bör väl ändå ses som en sorts kostnad. Och det är precis så som Field uppfattar platonismens svårigheter med att klara Benacerrafs utmaning.

Det finns ett annat sätt att rekonstruera argumentet. Field utgår från att en platonist är tvungen att hävda att korrelationen som beskrivs ovan föreligger. Och enbart det faktum att man *har* uppfattningar inom ett område kan ju sägas innebära att man postulerar en sorts överensstämmelse, eller i alla fall den situation som beskrivs av implikationen som går från vänster till höger. Om de påståenden som utgör innehållen i ens föreställningar är sanna (vilket man ju tror) så följer ju att ens föreställningar stämmer med de rådande förhållandena. Om man emellertid samtidigt gör antaganden som utesluter även i princip en rimlig förklaring av korrelationen ifråga så har man postulerat ett mysterium. Att postulera mysterier är något vi helst bör låta bli. Det följer från en sorts tänkandets försiktighetsprincip. Därför anser Field att platonismens rimlighet hänger på om den klarar Benacerrafs utmaning.

Hur de två formuleringarna av argumentet närmare bestämt förhåller sig till varandra kan diskuteras. En fördel med den senare är att den inte åberopar kontroversiella principer såsom 1, utan bara vilar på rekommendationen om att inte postulera mysterier. Samtidigt kan man kanske hävda att rekommendationen ifråga ger stöd åt 1. Hur som helst är det den första formuleringen jag skall hålla mig till.

3. KÄNSLIGHET OCH SÄKERHET

En av dem som vill avfärda Benacerrafs utmaning som ett skenproblem är Justin Clarke-Doane. Han anser att platonisternas antaganden om de matematiska objektens natur är irrelevanta för platonistens förmåga att klara utmaningen, det vill säga att förklara våra matematiska föreställningars pålitlighet i en mening som är sådan att om vi är oförmögna att förklara föreställningarnas pålitlighet i denna mening så undergräver det deras rättfärdigande.

Jag skrev tidigare att en förklaring av pålitligheten hos våra föreställningar är tänkt att visa att det inte är en ren slump att flertalet av dem är sanna (givet att de faktiskt är det). För att slumpen inte skall kunna sägas ha varit framme krävs rimligen att föreställningarna uppvisar en sorts känslighet gentemot de förhållanden de representerar, i den meningen att om förhållandena hade varit annorlunda (så att det vi tror hade varit falskt) så hade vi haft andra föreställningar. Samma sorts känslighet förväntar vi oss exempelvis hos en badrumsvåg. Anta att vågen visar att jag väger 70 kg och att så också är fallet. För att den skall vara pålitlig krävs också att den *inte* hade visat att jag väger 70 kg om jag hade varit 10 kg lättare.

I enlighet med detta tänker sig Clarke-Doane att den första uppgift som en platonist står inför är att visa att våra matematiska föreställningar är känsliga. Och det följer, menar han, från det ofta gjorda antagandet att matematiska förhållanden gäller med metafysisk nödvändighet, det vill säga inte bara i den faktiska världen utan i varje möjlig värld. Våra föreställningar brister i känslighet i den mån det finns världar där de förhållanden de beskriver är annorlunda utan att föreställningarna på ett motsvarande sätt är annorlunda. Och om matematiska förhållanden gäller med nödvändighet så finns inte sådana världar, helt enkelt därför att det då inte finns några världar där de är annorlunda överhuvudtaget. Med andra ord, givet att de matematiska förhållandena gäller med nödvändighet så är det, menar Clarke-Doane, trivialt så att våra matematiska föreställningar är känsliga.

Det finns ett annat sätt att hävda att det är en slump att vi har föreställningar inom ett område som är mestadels sanna (vid sidan av att argumentera för att de inte är känsliga), nämligen att visa att de inte är ”säkra”. Våra föreställningar saknar säkerhet om vi lätt hade kunnat ha haft andra föreställningar utan att de förhållanden de representerar hade varit annorlunda. Anta att vi får en fråga om hur många kulor som finns i en urna och att vi hugger till med 74, vilket råkar vara korrekt. Om vi lika gärna kunde ha huggit till med 75 (utan att det faktiska antalet hade behövt vara annorlunda) så kan vi ändå inte yvas över vår träffsäkerhet. Om våra matematiska föreställningar lätt hade kunnat vara annorlunda så kan man på ett liknande sätt hävda att det är en slump att vi har föreställningar på området som är mestadels sanna även om de faktiskt är sanna (med nödvändighet). Enligt Clarke-Doane kan emellertid även den strategin uteslutas, åtminstone när det gäller våra mest ”basala” matematiska föreställningar. Skälet är att dessa rimligen kan ses som resultatet av evolutionära processer vilka innebär att vi hade haft andra (basala) matematiska föreställningar bara om miljön i vilka människan utvecklades hade varit mycket olika. Alltså hade vi inte lätt kunnat ha haft andra (basala) matematiska föreställningar.

Evolutionsläran och antagandet att matematiska förhållanden gäller med nödvändighet förklarar, enligt Clarke-Doane, våra matematiska föreställningars pålitlighet i den meningen att de visar att om de är sanna så hade de inte lätt kunnat vara falska. Detta räcker, menar han, för att tysta alla adekvata tvivel avseende deras berättigande. Och poängen är att förklaringen ifråga är fullt tillgänglig för en platonist, eftersom den är neutral i förhållande till frågan om de matematiska objektens natur. Samma resonemang kan, enligt Clarke-Doane, användas på andra områden, inklusive etiken, eftersom vissa moraliska sanningar (om det finns några) också rimligen kan antas gälla med nödvändighet.

4. ATT FÖRKLARA PÅLITLIGHET

Det finns flera uppenbara sätt att invända mot Clarke-Doanes argumentation, men jag skall utgå från att han verkligen lyckats visa att våra matematiska föreställningar inte enkelt hade kunnat vara falska (givet att de är sanna). Frågan är om det ändå finns utrymme för att hävda att platonismen ger upphov till de skeptiska implikationer som Field har i åtanke.

Varför antas vår oförmåga att förklara pålitligheten hos våra föreställningar inom ett område visa att de inte är berättigade? Notera att det finns flera sätt att undergräva en uppfattnings berättigande. Ett är att ge något skäl att tro att den är falsk. Ett annat är att ge ett skäl att tro att det inte finns tillräckliga grunder för att tro att den är sann. Frånvaron av en plausibel förklaring till pålitligheten hos våra föreställningar om byn i Nepal verkar i bästa fall vara av den andra sorten. Den visar ju knappast att antalet invånare som är födda på en fredag *inte* är udda. Tanken är således att frånvaron av en förklaring av de relevanta föreställningarnas pålitlighet hotar deras berättigande genom att visa att de är ogrundade.

För att detta resonemang skall gå ihop måste vi anta att något är en rimlig förklaring till deras pålitlighet bara om det är en potentiell grund för att tro att de är sanna (som när upptäckten att en person som är misstänkt för ett brott hade ett starkt motiv stärker vår misstanke). Och det villkoret är inte uppfyllt av Clarke-Doanes argumentation. Det hypotetiska förhållandet att *om* våra föreställningar inom ett område är sanna så hade de inte lätt kunnat vara falska visar ju inte att de är sanna. Anta att vi vet att två av våra vänner befann sig i Paris under en helg och att vi undrar över om de träffades. Anta också att vi vet att var och en hade väldigt bestämda planer, men att vi inte har någon aning om deras innehåll. Från att de hade bestämda planer kan vi möjligen dra slutsatsen att om de träffades så hade det inte lätt kunnat vara annorlunda. Men den slutsatsen är i sin tur ingen ledtråd till om de träffades eller inte.

Om frånvaron av en rimlig förklaring till våra matematiska föreställningars pålitlighet antas undergräva deras berättigande genom att visa att de är ogrundade så kan vi därmed konstatera att Clarke-Doanes argumentation, även om den är framgångsrik, inte utgör en förklaring i den relevanta meningen och att den därför inte heller neutraliserar utmaningen.

5. PÅLITLIGHET OCH OUMBÄRLIGHET

Ibland förklarar vi varför vi har en föreställning genom att hänvisa till faktorer som också kan åberopas till stöd för dess sanning. I vissa fall anses den bästa förklaringen av en uppfattning rentav *förutsätta* att den är sann, som exempelvis när det gäller uppfattningar vi erhåller på ett direkt sätt genom våra sinnen (som den att det finns en dataskärm framför mig just nu). Om en förklaring till varför vi har vissa uppfattningar är sådan att den ger stöd för deras sanning så kan vi även säga att den

”förklarar deras pålitlighet” i den relevanta meningen. Givet en sådan förklaring så utgör själva det förhållandet att vi *har* föreställningen ifråga en grund för att godta det påstående som utgör dess innehåll. Det är den typen av grund som platonismen medför att vi får klara oss utan, förutsatt att platonismen utesluter rimliga förklaringar av våra matematiska föreställningars pålitlighet.

Vad spelar det för roll? Anta exempelvis att det för var och en av våra matematiska uppfattningar finns andra matematiska påståenden som vi också godtar och som uppfattningen ifråga antingen förklarar eller förklaras av (samtidigt som den inte strider mot något vi i övrigt tror). Varför räcker inte den typen av ”internt” stöd för att våra matematiska föreställningar skall vara berättigade?

Svaret måste vara att det är något speciellt med den typ av grund en förklaring av våra matematiska uppfattningars pålitlighet skulle bidra med. Och det speciella är rimligtvis att den innebär att de i så fall får stöd av förhållanden av en annan karaktär än de som föreställningarna uttalar sig om. Att vi *har* en viss uppfattning är ju ett rent psykologiskt, icke-matematiskt faktum. Därmed kan man hävda att det kan etableras på ett oberoende sätt och således att det stöd de ger våra matematiska föreställningar också är oberoende. Man kan åtminstone hävda att det skulle innebära att våra matematiska föreställningar är mer integrerade (i en ”bevismässig” mening) i vårt totala system än de annars skulle varit.

Begreppet ”oberoende stöd” är problematiskt, och man kan ifrågasätta relevansen hos graden med vilken en föreställning är integrerad i ett system av uppfattningar. Mitt ärende här är emellertid ett annat än att försvara resonemanget.

Psykologiska förhållanden sägs ofta vara ”naturliga”, vilket i sin tur brukar betyda att de kan etableras empiriskt, genom våra sinnen. Om det är den faktorn som ligger bakom vikten hos den grund de ger så skulle emellertid stöd från vilka som helst naturliga förhållanden fungera lika väl. Man kan exempelvis, i Willard Van Orman Quines efterföljd, försvara matematikens berättigande genom att hävda att den spelar en oumbärlig roll i de bästa teorierna inom fysiken och därmed erhåller stöd från de observationer som de teorierna bygger på. Field är känd för sina försök att ifrågasätta att de spelar en sådan roll. Poängen här är emellertid att *om* det Quine-inspirerade försvaret är ett framgångsrikt svar på Benacerrafs utmaning så är den, till skillnad från vad Hartry Field själv påstått,[3] densamma som den enligt vilken vi bara har anledning att tro på sådant som kan fogas in i en naturalististisk världsbild, genom att det bidrar till förklaringen av våra observationer.

[3]Se till exempel Field 1989, s. 26.

6. GRADER AV BERÄTTIGANDE

Den dialektiska distansen, om man får uttrycka sig så, mellan platonismen och de andra hållningar som sägs stå inför Benacerrafs utmaning och de epistemiska principer utmaningen bygger på är därmed så stor att argumentet knappast övertygar de troende. Ett undantag är möjligen idén om betydelsen av hur väl en föreställning är integrerad bland våra övriga uppfattningar. Samtidigt är väl det en fråga om grader, och man kan undra om det faktum att platonismen medför att våra matematiska föreställningar är berättigade i mindre grad verkligen är skäl att föredra någon annan (till exempel en konstruktivistisk) syn på de matematiska objekten. Kanske är det rimligt att anse att matematiska föreställningar i mindre grad är berättigade än vissa andra? I detta sammanhang är det värt att notera att det är tveksamt huruvida särskilt många matematiker behöver bekymra sig om sanningsfrågan gällande de axiom och teorem som övervägs. I stället är det relationerna mellan dem (vad som följer från axiomen, och så vidare) som står i centrum för intresset. Och dem kan man ju utforska utan att binda sig till några bestämda uppfattningar om matematiska realiteter, eftersom de rör logiska förhållanden snarare än matematiska.

LITTERATUR

Benacerraf, Paul. 1973. ”Mathematical Truth”. *Journal of Philosophy* 70, s. 661–79.

Clarke-Doane, Justin. Kommande. ”What is the Benacerraf Problem?”, i *New Perspectives on the Philosophy of Paul Benacerraf: Truth, Objects, Infinity*, red. F. Pataut. Dordrecht: Springer. (Uppsatsen kan erhållas genom Clarke-Doanes hemsida.)

Field, Hartry. 1989. *Realism, Mathematics, and Modality*. Oxford: Blackwell.

Goldman, Alvin. 1967. ”A Causal Theory of Knowing”. *Journal of Philosophy* 64, s. 357–72.