Eric Johannesson

Finns det objektiva sannolikheter?

1. OBJEKTIVA OCH SUBJEKTIVA SANNOLIKHETER

Ofta vet man inte om en händelse kommer inträffa eller ej. Man kan dock vara mer eller mindre säker. Ens *subjektiva* sannolikhet för att händelsen inträffar är ett mått på denna osäkerhet. Den *objektiva* sannolikheten för att händelsen inträffar är något helt annat. Exakt vad det skulle kunna vara är emellertid oklart.

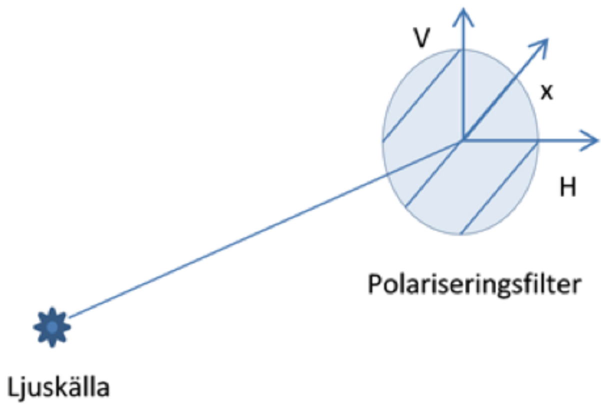
Många menar ändå att det, åtminstone på kvantnivå, finns objektiva sannolikheter. Man menar att kvantmekaniska processer är indeterministiska. Till stöd för denna tes åberopar man ibland *Bells teorem*. Ironiskt nog tog upphovsmannen själv avstånd från en sådan tolkning (Bell 1997). Vad Bell (1964) visade var nämligen att kvantmekaniken inte är förenlig med någon *lokalt* deterministisk teori. *Lokalitet* är en princip inom fysiken som innebär att en händelse på en viss plats inte kan påverka en händelse på en annan plats snabbare än den tid det tar för ljuset att färdas från den ena platsen till den andra. Och, som vi skall se, är det lokalitetsprincipen snarare än något annat som måste stryka på foten i ljuset av de kvantmekaniska fenomenen.

Deterministen, å andra sidan, tror inte på objektiva sannolikheter. När deterministen säger att sannolikheten för att ett mynt ska landa krona är 1/2, så uttalar han sig bara om sin egen grad av osäkerhet. Deterministen tänker sig att utfallet i själva verket bestäms av någon för honom dold variabel: utgångshastigheten, rotationshastigheten, fallhöjden, myntets vikt, etc. I vetenskapliga sammanhang torde detta vara den naturliga utgångspunkten. Einstein, som var determinist, tänkte sig därför att något liknande måste gälla även för fenomen på kvantnivå. Inte nog med det: med sitt berömda EPR-argument lyckades han visa att existensen av dolda variabler inom kvantmekaniken i själva verket *följer* av lokalitetsprincipen. Einstein visade därmed att *lokalitet implicerar determinism*.

Bells teorem går ut på att determinism och lokalitet (tillsammans med vissa andra mycket rimliga antaganden) är oförenliga med vissa kvantmekaniska förutsägelser. Bell visade alltså i princip att *determinism implicerar icke-lokalitet*. Och eftersom kvantmekaniken är empiriskt adekvat torde slutsatsen vara given: icke-lokalitet. Vad gäller determinism säger dock inte Einsteins och Bells resultat någonting.

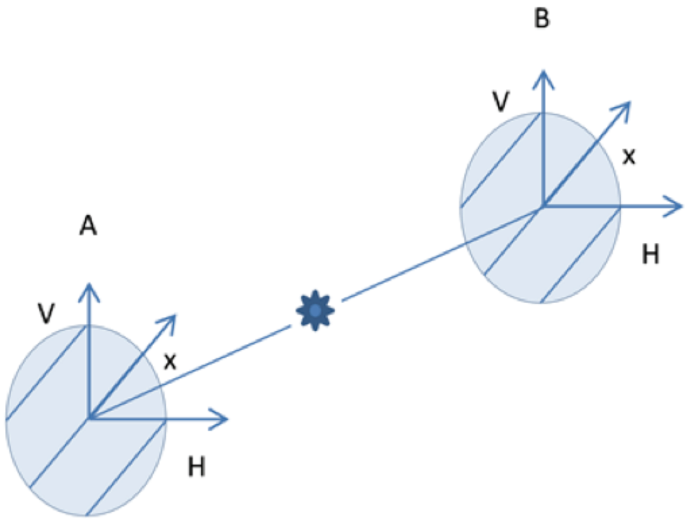
2. EINSTEIN: LOKALITET → DETERMINISM

Låt H och V vara två sinsemellan vinkelräta vektorer i rummet, som även är vinkelräta i förhållande till en ljuskälla enligt figur 1. Polariseringsfiltret kan vridas med en vinkel *x* i förhållande till H och V. Om man skickar ljus direkt från källan genom polariseringsfiltret kommer ungefär hälften av fotonerna att passera, alldeles oavsett hur filtret är vinklat.



Figur 1: Foton och polariseringsfilter

Enligt kvantmekaniken beror detta på att varje foton i ljusstrålen har en objektiv sannolikhet på 50% att passera. Einstein ogillade emellertid denna förklaring. Han menade att processen måste vara deterministisk, av följande skäl. Det går nämligen att konstruera en ljuskälla (Mandel och Wolf 1995, s. 649) som skickar ut par av fotoner, A och B, i motsatt riktning, med egenskapen att om den ena fotonen passerar ett polariseringsfilter med vinkel *x*, så kommer den andra fotonen *inte* passera ett likadant vinklat filter på sin sida, och vice versa (se figur 2). Man säger att fotonerna är *antikorrelerade*.



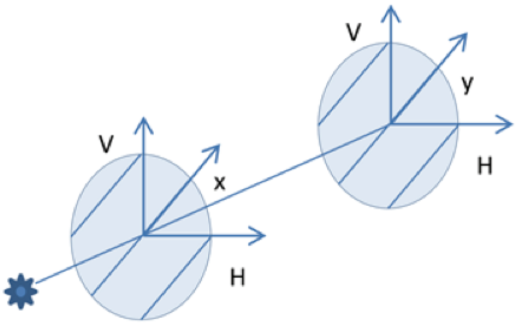
Figur 2: Antikorrelerade fotoner

Enligt Einsteins speciella relativitetsteori kan ingen energi överföras snabbare än ljuset. Mer generellt menade Einstein att en händelse som inträffar på en viss plats inte kan påverka en händelse på en annan plats snabbare än den tid det tar för ljuset att färdas från den ena platsen till den andra. Detta brukar man kalla för *lokalitetsprincipen*.

Men om lokalitetsprincipen stämmer, och det är slumpen som avgör huruvida en foton passerar ett polariseringsfilter, hur kommer det sig då att fotonerna i paret ovan är antikorrelerade? Detta är kärnan i EPR-argumentet. Eftersom ingen signal hinner överföras från det ena filtret till det andra, kan inte den händelse som utgörs av att den ena fotonen passerar göra att den andra fotonen inte passerar. Om det verkligen vore slumpen som avgjorde, och bägge fotonerna hade sannolikheten 50% att passera, skulle man därför förvänta sig att bägge passerade i 25% av fallen snarare än 0%. Alltså, resonerade Einstein, måste det vara avgjort redan när fotonerna bildas huruvida de kommer passera eller inte. Annorlunda uttryckt: det finns en *dold variabel* utöver vinkeln x (nämligen någon egenskap hos fotonen) som avgör utfallet i varje försök, låt oss kalla den λ. Skälet till att vi inte kan förutsäga utfallet beror alltså enbart på att vi inte känner till värdet på denna variabel. Lokalitet implicerar med andra ord determinism.

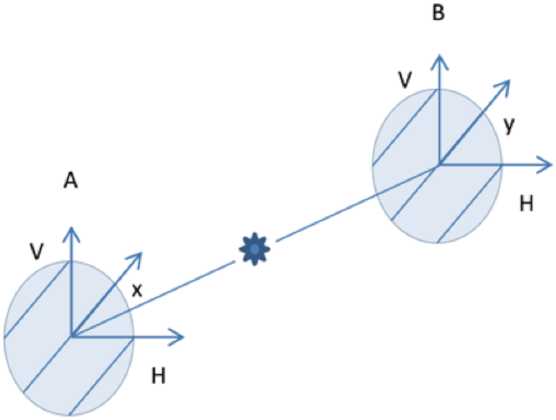
3. BELL: DETERMINISM + ICKE-KONSPIRATION → ICKE-LOKALITET

Om vi använder två filter enligt figur 3, så säger kvantmekaniken (Dirac, 1958, s. 6) att sannolikheten att en foton som passerar det första filtret även ska passera det andra är $\cos^2(x-y)$, dvs. kvadraten av $\cos(x-y)$. Sannolikheten att en foton ska passera båda är alltså $1/2\cos^2(x-y)$.



Figur 3: Foton och två polariseringsfilter

Det märkliga är att motsvarande samband råder i fallet med antikorrelerade fotoner i figur 4.



Figur 4: Antikorrelerade fotoner

Sannolikheten att B passerar givet att A passerar är nämligen $\sin^2(x-y)$, vilket är detsamma som $1-\cos^2(x-y)$. Sannolikheten att båda passerar (Mandel och Wolf 1995, s. 650) är alltså

$$\tfrac{1}{2}\sin^2(x-y) \tag{1}$$

Vidare gäller att sannolikheten för att B ska passera givet att A *inte* passerar är $\cos^2(x-y)$. Sannolikheten att B passerar beror alltså dels på huruvida A passerar, dels på skillnaden mellan x och y. Det är emellertid först när man jämför resultaten från A och B som man upptäcker korrelationen. Om man enbart tittar på B så ser man bara att den passerar i ungefär hälften av fallen, eftersom den totala sannolikheten att B passerar är

$$\tfrac{1}{2}\sin^2(x-y)+\tfrac{1}{2}\cos^2(x-y)=\tfrac{1}{2} \tag{2}$$

Det är därför man inte kan använda antikorrelerade fotoner för att skicka information snabbare än ljuset mellan A och B. Utfallet på B-sidan säger nämligen ingenting i sig om hur vinkeln är ställd på A-sidan.

Låt säga att vi nu upprepar försöket med antikorrelerade fotoner ett stort antal gånger för några olika värden på variablerna x och y. Låt a och b vara variabler som antar värdena JA eller NEJ beroende på om foton A respektive B passerar eller inte passerar sitt filter, och låt $N(x,y,a,b,\lambda)$ vara en funktion som för varje kombination av värden på variablerna i argumentet anger antalet försök då variablerna ifråga faktiskt antar dessa värden. $N(x_1,y_1,a_{\mathrm{JA}},b_{\mathrm{NEJ}},\lambda_1)$ anger då exempelvis det antal försök då x och y är ställda i x_1 respektive y_1 grader, foton A passerar och foton B inte passerar, och där värdet på den dolda variabeln är λ_1. Vad λ_1 kan tänkas stå för kommer vi till alldeles strax, men vi kan tänka på det som någon viss egenskap hos det antikorrelerade fotonparet som avgör huruvida de passerar sina filter.

Funktionen $N(x,y,a,b,\lambda)$ är naturligtvis inte mätbar, eftersom vi aldrig känner till värdet på λ. Men i enlighet med vårt antagande om determinism förutsätter vi att funktionen ändå *har* ett visst värde. Mätbara är däremot exempelvis funktionerna $N(x,y,a,b)$, $N(x)$, $N(x,b)$, etc., som definieras helt analogt. Speciellt har vi den nollställiga funktionen N som helt enkelt anger det totala antalet försök. Med hjälp av dessa funktioner ska vi nu göra ytterligare två antaganden, *lokalitet* och *icke-konspiration*, som tillsammans med antagandet om determinism kommer leda till en motsägelse med de kvantmekaniska förutsägelserna.

Det första antagandet är *lokalitet*: huruvida A (B) passerar bestäms helt och hållet av värdet på variablerna x och λ (y och λ). Värdet på a givet ett visst värde på variablerna x, y och λ är med andra ord *statistiskt oberoende* av värdet på b (och vice versa). Det betyder i sin tur att andelen fall då a antar ett visst värde givet x, y, b och λ, kommer vara ungefär lika stor som andelen fall då a antar detta värde givet enbart x, y och λ:

$$\frac{N(x,y,a,b,\lambda)}{N(x,y,b,\lambda)} \approx \frac{N(x,y,a,\lambda)}{N(x,y,\lambda)} \tag{3}$$

Vidare gäller att värdet på a givet ett visst värde på variablerna x och λ är statistiskt oberoende av värdet på y. Enligt samma resonemang får vi

$$\frac{N(x,y,a,\lambda)}{N(x,y,\lambda)} \approx \frac{N(x,a,\lambda)}{N(x,\lambda)} \tag{4}$$

och motsvarande för b:

$$\frac{N(x,y,b,\lambda)}{N(x,y,\lambda)} \approx \frac{N(y,b,\lambda)}{N(y,\lambda)} \tag{5}$$

Det andra antagandet är *icke-konspiration*: variablerna x, y och λ är statistiskt oberoende av varandra. Vi tänker oss att vi har två laborationsassistenter som väljer vinklar slumpmässigt oberoende av varandra, och som inte heller påverkas av värdet på den dolda variablen λ. Alltså:

$$\frac{N(x,y,\lambda)}{N(x,y)} \approx \frac{N(x,\lambda)}{N(x)} \approx \frac{N(y,\lambda)}{N(y)} \tag{6}$$

$$\frac{N(x,\lambda)}{N(\lambda)} \approx \frac{N(x)}{N} \tag{7}$$

$$\frac{N(y,\lambda)}{N(\lambda)} \approx \frac{N(y)}{N} \tag{8}$$

$$\frac{N(x,y)}{N(y)} \approx \frac{N(x)}{N} \tag{9}$$

Från (3)–(5) får vi nu

$$N(x,y,a,b,\lambda) \approx \frac{N(x,a,\lambda)N(y,b,\lambda)N(x,y,\lambda)}{N(x,\lambda)N(y,\lambda)} \tag{10}$$

vilket tillsammans med (6)–(10) ger

$$N(x,y,a,b,\lambda) \approx \frac{N(x,a,\lambda)\,N(y,b,\lambda)}{N(\lambda)} \tag{11}$$

3.1. Den deterministiska beräkningen

Låt oss för enkelhetens skull anta att x och y kan anta tre olika värden, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ och $x_3 = y_3$ (det visar sig att två olika värden inte är tillräckligt för att härleda en motsägelse). Detta ger oss åtta olika kategorier av fotoner, $\lambda_1,\ldots,\lambda_8$, som här beskrivs i termer av beteendet hos A-fotonen respektive B-fotonen i det antikorrelerade paret:

	x_1/y_1	x_2/y_2	x_3/y_3
λ_1	JA/NEJ	JA/NEJ	JA/NEJ
λ_2	JA/NEJ	JA/NEJ	NEJ/JA
λ_3	JA/NEJ	NEJ/JA	JA/NEJ
λ_4	JA/NEJ	NEJ/JA	NEJ/JA
λ_5	NEJ/JA	JA/NEJ	JA/NEJ
λ_6	NEJ/JA	JA/NEJ	NEJ/JA
λ_7	NEJ/JA	NEJ/JA	JA/NEJ
λ_8	NEJ/JA	NEJ/JA	NEJ/JA

(12)

I allmänhet gäller att om λ kan anta ett ändligt antal olika värden, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, så har vi

$$N(x,y,a,b) = N(x,y,a,b,\lambda_1) + \ldots + N(x,y,a,b,\lambda_n) \tag{13}$$

vilket tillsammans med (11) ger

$$N(x,y,a,b) \approx \frac{N(x,a,\lambda_1)\,N(y,b,\lambda_1)}{N(\lambda_1)} + \ldots + \frac{N(x,a,\lambda_n)\,N(y,b,\lambda_n)}{N(\lambda_n)} \tag{14}$$

I vårt fall får vi speciellt att

$$N(x,y,a_{JA},b_{JA}) \approx \sum_{1\leq k\leq 8} \frac{N(x,a_{JA},\lambda_k)\,N(y,b_{JA},\lambda_k)}{N(\lambda_k)} \tag{15}$$

och, enligt samma resonemang,

$$N(a_{JA},b_{JA}) \approx \sum_{1\leq i\leq 3}\sum_{1\leq j\leq 3}\sum_{1\leq k\leq 8} \frac{N(x_i,a_{JA},\lambda_k)\,N(y_j,b_{JA},\lambda_k)}{N(\lambda_k)} \tag{16}$$

Låt oss nu beräkna denna summa. Genom att betrakta (12) får vi i tur och ordning:

$$
\begin{aligned}
&N(x_1,y_1,a_{JA},b_{JA}) \approx 0\\
&N(x_1,y_2,a_{JA},b_{JA}) \approx \frac{N(x_1,\lambda_3)\,N(y_2,\lambda_3)}{N(\lambda_3)} + \frac{N(x_1,\lambda_4)\,N(y_2,\lambda_4)}{N(\lambda_4)}\\
&N(x_1,y_3,a_{JA},b_{JA}) \approx \frac{N(x_1,\lambda_2)\,N(y_3,\lambda_2)}{N(\lambda_2)} + \frac{N(x_1,\lambda_4)\,N(y_3,\lambda_4)}{N(\lambda_4)}\\
&N(x_2,y_1,a_{JA},b_{JA}) \approx \frac{N(x_2,\lambda_5)\,N(y_1,\lambda_5)}{N(\lambda_5)} + \frac{N(x_2,\lambda_6)\,N(y_1,\lambda_6)}{N(\lambda_6)}\\
&N(x_2,y_2,a_{JA},b_{JA}) \approx 0\\
&N(x_2,y_3,a_{JA},b_{JA}) \approx \frac{N(x_2,\lambda_2)\,N(y_3,\lambda_2)}{N(\lambda_2)} + \frac{N(x_2,\lambda_6)\,N(y_3,\lambda_6)}{N(\lambda_6)}\\
&N(x_3,y_1,a_{JA},b_{JA}) \approx \frac{N(x_3,\lambda_5)\,N(y_1,\lambda_5)}{N(\lambda_5)} + \frac{N(x_3,\lambda_7)\,N(y_1,\lambda_7)}{N(\lambda_7)}\\
&N(x_3,y_2,a_{JA},b_{JA}) \approx \frac{N(x_3,\lambda_3)\,N(y_2,\lambda_3)}{N(\lambda_3)} + \frac{N(x_3,\lambda_7)\,N(y_2,\lambda_7)}{N(\lambda_7)}\\
&N(x_3,y_3,a_{JA},b_{JA}) \approx 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Enligt (7) och (8) gäller att

$$
\frac{N(x_i,\lambda_k)\,N(y_j,\lambda_k)}{N(\lambda_k)} \approx \frac{N(x_i)\,N(y_j)\,N(\lambda_k)}{N^2}
\tag{18}
$$

Så om vi bara ser till att

$$
N(x_1) = N(x_2) = N(x_3) = N(y_1) = N(y_2) = N(y_3) = N/3
\tag{19}
$$

så får vi

$$
\frac{N(x_i,\lambda_k)\,N(y_j,\lambda_k)}{N(\lambda_k)} = \frac{N(\lambda_k)}{9}
\tag{20}
$$

vilket tillsammans med (17) ger att

$$
N(a_{JA},b_{JA}) \approx \frac{2}{9}\left(N(\lambda_2) + \ldots + N(\lambda_7)\right)
\tag{21}
$$

Och eftersom $N(\lambda_2) + \ldots + N(\lambda_7) \leq N$, ger detta i sin tur att

$$N(a_{JA},b_{JA}) \leq {}^{2}\!/_{9}N \tag{22}$$

3.2. DEN KVANTMEKANISKA BERÄKNINGEN

Från (1) har vi

$$\frac{N(x,y,a_{JA},b_{JA})}{N(x,y)} \approx \frac{1}{2}\sin^2(x-y) \tag{23}$$

vilket tillsammans med (9) ger att

$$N(x,y,a_{JA},b_{JA}) \approx \frac{1}{2}\sin^2(x-y)\frac{N(x)N(y)}{N} \tag{24}$$

Med samma förutsättningar som i (19) ger kvantmekaniken således

$$N(a_{JA},b_{JA}) \approx \sum_{1\leq i\leq 3}\sum_{1\leq j\leq 3}\frac{1}{2}\sin^2(x_i-y_j)\frac{N}{9} =$$

$$= \frac{N}{9}(\sin^2(x_1-x_2)+\sin^2(x_1-x_3)+\sin^2(x_2-x_3)) \tag{25}$$

Men om man väljer $x_1 = 0$, $x_2 = 60$ och $x_3 = 120$, så får vi

$$\sin^2(x_1-x_2) + \sin^2(x_1-x_3) + \sin^2(x_2-x_3) = 2.25 \tag{26}$$

vilket ger maximal avvikelse från (22):

$$N(a_{JA},b_{JA}) \approx \frac{2.35}{9}N \tag{27}$$

4. SLUTSATS: ICKE-KONSPIRATION → ICKE-LOKALITET

Den kvantmekaniska förutsägelsen styrks av empiriska observationer. Enda sättet att behålla lokalitet vore därför att förneka icke-konspiration. Det skulle innebära att det fanns en korrelation mellan den dolda variabeln λ och vinklarna *x* och *y*. En sådan korrelation vore naturligtvis teoretiskt möjlig. Exempelvis skulle det kunna vara så att det som påverkar värdet på λ även påverkar laborationsassistenternas val av vinkel, även om det förfaller föga troligt. Den naturliga slutsatsen torde därför vara icke-lokalitet. Däremot säger inte Bells och Einsteins resultat något om determinism. Resultaten är förenliga både med determinism och icke-determinism. Än så länge borde därför den naturliga utgångspunkten vara determinism: det finns inga objektiva sannolikheter.

LITTERATUR

Bell, J. S. 1964. ”On the Einstein Podolsky Rosen Paradox”. *Physics* 1, nr 3, s. 195–200.

Bell, J. S. 1997. ”Indeterminism and Nonlocality”. I *Mathematical Undecidability, Quantum Nonlocality and the Question of the Existence of God*, red. A. Driessen och A. Suarez, s. 83–100. Dordrecht: Kluwer.

Dirac, P. 1958. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford: Clarendon Press.

Mandel, L. och E. Wolf. 1995. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press.