

Recension

Första ordningens logik

Christian Bennet

Studentlitteratur 2004. 175 s. ISBN 91-44-03453-9

Ingenting tyder på att klassisk första ordningens predikatlogik kommer att trängas ut som huvudföremål för introduktioner till formell logik, och årligen utkommer ett antal läroböcker i ämnet. Dock inte många på svenska, så den logikintresserade kastar sig begärligt över Christian Bennets bok för att se vad den tillför den magra svenska logiklitteraturen.

Boken har enligt förordet tillkommit under en oändlig tidsperiod, men dess omfång är trots detta lyckligtvis begränsat. På de 160 sidorna text får författaren in allt väsentligt av teori i en introduktionskurs i logik, och åtskilliga övningar med lösningar. Framställningen är angenämt läslig, även om den ansluter sig till en traditionell språklig stollighet genom att tala om symbolers ”ställighet”. (Svenska språknämnden påpekade för många år sedan som svar på en fråga från en filosofistuderande att vi inte talar om molekylers ”atomighet” eller fordons ”hjulighet”).

Boken innehåller några felaktigheter. Dessa behöver inte tas upp här, eftersom författarens webbsida <http://maya.phil.gu.se/logik/fol/> ger rättelser till boken.

Boken är skriven för att kunna användas som kurslitteratur. Eftersom tidigare kompendieversioner av boken använts som kurslitteratur under många år vid universiteten i Göteborg och Lund kommer den säkerligen att komma till god användning vid dessa och andra lärosäten under ett antal år framöver. Mina synpunkter i det följande handlar om innehållet i boken, helt bortsett från frågan om vad som är lämpligt eller ändamålsenligt i läroböcker (en fråga där jag inte har någon bestämd övertygelse).

Predikatlogikens användning av variabler överensstämmer väl med informellt matematiskt språkbruk, men en formell definition av predikatlogikens syntax leder raskt till petigheter som handlar om substitution av termer för variabler. Ett traditionellt sätt att hantera detta är

att införa villkoret att t måste vara fri för x vid substitution av t för x . I automatisk teorembevisning är det bekvämt att använda en formalism i vilken man inte behöver kontrollera att detta villkor är uppfyllt. Det finns också de som föredrar att använda en sådan formalism även för undervisningssyften eller i teoretiska sammanhang, och Bennet väljer att använda ett härledningssystem uppställt av Benson Mates – en form av naturlig deduktion utökad med fyra logiskt överflödiga kvantifikatorregler – där substitution av t för x bara sker för variabelfria termer t , och alla formler i härledningar är slutna. Detta innebär alltså att man resonerar med användning av konstanter i stället för fria variabler för att komma fram till alltsåsagor eller dra slutsatser ur existensutsagor. Dessa och likartade metoder att undvika ”fri för x ”-villkoret gör det i viss mening enklare att uppställa härledningar, men jag är ingalunda övertygad om att man utanför automatisk teorembevisning gör livet enklare genom att använda sådana system. Inget sådant system är vedertaget i teoretiska sammanhang, och när vi börjar tala om PA eller ZF måste vi hur som helst hantera substitution i det allmänna fallet. Bennet har inte riktigt fått det hela att gå ihop på denna punkt. På sidan 41 sägs att i samtliga fall när notationen $f(t)$ används kommer x att vara den enda fria variabeln i f , och t att vara en variabelfri term. Detta gäller emellertid enbart i hanteringen av Mates’ system. I formuleringen i senare kapitel av axiom för PA och ZF används som vanligt substitution där inget av dessa två villkor är uppfyllt. En uppmärksam läsare kan undra hur dessa teorier alls kan hanteras med användning av det införda härledningssystemet.

Apropå PA kan en läsare som är bekant med denna teori också undra varför författaren bland axiomen inkluderar att varje tal skilt från 0 har en omedelbar föregångare (s. 110). Svaret visar sig på sidan 117, där det sägs att ”de första sju axiomen” i PA räcker för ofullständighet och oavgörbarhet. Den obetydliga formuleringsvinst man gör på detta är otillräcklig för att motivera att ”PA” definieras på ett sätt som inte överensstämmer med gängse språkbruk, och som därför kan väcka helt onödig undran och osäkerhet vid läsning av annan litteratur. Men annars har jag inte något klankade på presentationen av PA och Gödels sats i avsnitt 9.4, som ger överskådliga bevis, väl avvägda vad gäller vad som visas och vad som utelämnas.

När det gäller predikatlogiken, för att återgå till framställningen av denna, ger boken sundhets- och fullständighetsbevis för Mates’ system, där fullständighetsbeviset är en variant av Henkins bevis som jag tror Mates var först att framlägga i tryck. Leon Henkin har själv i *Bulletin of Symbolic Logic* (”The discovery of my completeness proofs”, juni 1996) gett en ingående redogörelse för hur han kom fram till sina bevis, och nämner först i slutet att han genom att ge logikkurser själv kom fram

först till Hasenjagers förenkling (två steg i stället för oändligt många steg) och sedan till Mates' (ett steg). Bennet ger ettstegsresonemanget benämningen "Lindenbaums lemma" (s. 76), vilket är både historiskt och innehållsligt felaktigt. Annars är beviset ungefär lika begripligt som vanligt, och kapitlet (Metalogik, kapitel 7) bevisar också kompakthets-satsen och ger ett par typiska tillämpningar. Löwenheim-Skolems sats ges som övning och nämns också i kapitel 8 i samband med Lindströms (första) karakterisering av klassisk predikatlogik, men av någon anledning nämns inte Löwenheim och Skolem i sammanhanget. Det sista avsnittet 7.4 inför kortfattat begreppet mekanisk avgörbarhet och formulerar Church-Turings sats om predikatlogikens oavgörbarhet. Den uppmärksamme läsaren kan bli något osäker på vad boken egentligen visar om detta resultat. På sidan 67 sägs att "vi skall emellertid senare visa att det för första ordningens logik inte finns någon generell algoritm för att avgöra om en sats följer ur en given satsmängd". På sidan 84 förklaras emellertid att ett bevis av Church-Turings sats dock "skulle leda oss in i ett helt annat område av logiken, nämligen rekursionsteorin, varför vi avstår från det här". I avsnitt 9.4 sägs det helt framt att "vi har bevisat Church-Turings sats", men detta får nog tolkas hypotetiskt, utgående från det obevisade påståendet att "de första sju axiomen i PA" ger en oavgörbar teori.

Henkins bevis för fullständigheten hos första ordningens predikatlogik, eller någon variant av detta bevis, är vanligt förekommande i logikböcker, och jag finner det själv beklagligt att så gott som alla böcker ignorerar hans bevis för fullständigheten hos typteorin eller hos andra ordningens logik. Beviset för fullständigheten hos andra ordningens logik (med, låt oss anta, individvariabler och mängdvariabler) förutsätter en semantik där man förutom att välja domän för individvariablerna även får välja en domän för mängdvariablerna. Bennet följer i sin framställning av andra ordningens logik i kapitel 8 den vanliga inskränkningen att enbart knyta andra ordningens logik till den semantik i vilken mängdvariablerna varierar över samtliga delmängder av individdomänen.

Kapitel 10, betitlat "Mängder", förklarar en del mängdteoretiska begrepp som använts i tidigare kapitel, och eftersom avsnitten 10.1–10.6 inte förutsätter något av det tidigare materialet kan en läsare som är obekant med dessa mängdteoretiska begrepp studera kapitel 10 först. Avsnitt 10.4, om axiomatisk mängdlära, använder dock predikatlogisk formalism och framstår i mina ögon som mer förvirrande än upplysande, bland annat på grund av mystiska utsagor om regularitets- och substitutionsaxiomen. Avsnittet innehåller en intressant passus för den uppmärksamme läsaren, då det sägs att vi kan i ZF bevisa "att varje ändlig delteori till ZF är konsistent". Den uppmärksamme läsaren reflekterar

att eftersom motsägelsefriheten hos ZF trivialt följer av att varje ändlig delteori till ZF är motsägelsefri kan vi alltså i ZF bevisa att ZF är motsägelsefri, och enligt Gödels andra sats dra slutsatsen att ZF är motsägelsefull. (Just ett sådant bevis för motsägelsefullheten hos PA har presenterats av Eduard Wette.) Det är förvisso en smaksak i vilken mån man tycker att sammanhang som detta bör framhävas och begrundas i en introduktionsbok i logik, men själv skulle jag gärna ha sett åtminstone en övningsuppgift för den uppmärkamme läsaren.

Boken framför en frejdig men ounderbbyggd övertygelse om den formella logikens breda tillämplighet, inte bara inom matematik, datalogi, och närliggande områden, utan inom fysik, kemi, psykologi och sociologi. I kapitel 9, om första ordningens teorier, sägs inledningsvis att fastän alla exemplen råkade vara hämtade från matematiken kunde de också ha hämtats från något av dessa andra områden. Det är för mig höljt i dunkel vilka första ordningens teorier från dessa områden som kan avses, och jag skulle gärna ha sett några exempel.

Sammanfattningsvis är mitt intryck att det helt klart finns möjlighet för en läsare att lära sig åtskilligt om logik genom att studera denna bok, och att den genom sin allmänna läslighet och sitt hanterliga omfång inbjuder till sådant studium.

TORDEL FRANZÉN