Dag Westerståhl

Tal till Solomon Feferman

[Nedanstående text utgör det tal som Dag Westerståhl höll på Musikaliska Akademien i oktober 2003, i samband med att Feferman tilldelades Rolf Schock-priset i logik och filosofi. Prissumman var 400 000 kronor. Priset utdelas av Kungl. Vetenskapsakademien och har tidigare tilldelats W.V. Quine, Michael Dummett, Dana Scott, John Rawls och Saul Kripke.]

Solomon Feferman har lämnat viktiga bidrag inom logikens samtliga huvudområden, men idag belönas han med Rolf Schocks pris i logik och filosofi för sina avgörande insatser inom den gren av logiken som brukar kallas *metamatematik*. För att beskriva dessa insatser är det lämpligt att utgå från det mest uppmärksammade av den moderna logikens alla resultat, också långt utanför kretsen av specialister, nämligen Kurt Gödels två ofullständighetssatser från 1931. Den första av dessa satser säger att ingen axiomatisk teori som innehåller elementär aritmetik, kan fånga alla sanna påståenden som kan uttryckas i teorins språk. I varje sådan teori kommer det att finnas påståenden som är sanna, men som inte kan bevisas, eller påståenden som är falska men bevisbara. Resultatet drar alltså en skarp gräns mellan *sanning* å ena sidan och *bevisbarhet* å den andra.

Gödels andra sats handlar om *motsägelsefrihet*. Det är ett minimikrav på en teori att den inte leder till motsägelser: från en motsägelse kan ju vad som helst bevisas. Frågan är nu hur man kan *veta* att en teori är motsägelsefri. Den frågan stod högt på dagordningen under den moderna logikens första period, beroende på att man upptäckt motsägelser i föreslagna axiomatiseringar av mängdteori. *Russells Paradox* är det mest kända exemplet. Det stod klart att paradoxerna inte berodde på några enkla förbiseenden, utan pekade på grundläggande begreppsliga frågor.

Reaktionen på paradoxerna varierade, men matematikern David Hilbert föreslog följande utväg. Matematik handlar ofta om abstrakta ting, och endast en begränsad del har ett klart och tydligt *åskådligt* innehåll: t.ex. vissa enkla påståenden om heltal. Hilbert poängterade nu att de formella matematiska språken själva består av uttryck – symboler, formler, bevis – av just denna precisa och åskådliga natur. *Metamatematik* var Hilberts namn på en matematisk teori som handlar *om* formella teorier, och i vilken endast metoder ställda utom allt tvivel – s.k. *finita* metoder – var tillåtna. Påståendet att en viss teori är motsägelsefri är just ett metamatematiskt påstående. Att med finita metoder visa klassiska matematiska teoriers motsägelsefrihet skulle eliminera hotet om paradoxer, och i denna mening säkra matematikens grundvalar. På *Hilberts Program* stod att genomföra dessa bevis för motsägelsefrihet.

Men nu kom Gödels andra ofullständighetssats som ett dråpslag: den säger nämligen att för varje motsägelsefri och tillräckligt stark teori gäller, att påståendet om dess motsägelsefrihet inte självt kan visas med metoder som är tillgängliga *inom* teorin. Om vi tänker oss att alla finita metoder ryms inom en klassisk teori för elementär aritmetik – vanligen kallad Peanos Aritmetik – så följer det att *om* Peanos Aritmetik är motsägelsefri, så *kan* man inte bevisa detta faktum med finita metoder!

En betydande del av logisk forskning under 1900-talets senare hälft kretsade kring innebörden i Gödels resultat, och mer allmänt kring de grundvalsfrågor som hade rests av Russell, Hilbert, och många andra. Det är för sina bestående insatser på detta område som Feferman tilldelas Schock-priset.

En sådan insats gäller *aritmetisering*. Jag sade att symboler, formler, bevis är syntaktiska objekt som kan studeras matematiskt. I praktiken *kodar* man dessa formella uttryck som heltal. En sådan kodning kallas ofta *Gödelnumrering*. Därvid kommer påståenden om språkliga uttryck att översättas till påståenden om heltal, och man har således aritmetiserat metamatematiken. Många av de översatta påståendena *om* en teori kan också bevisas *i* teorin själv, medan andra – t.ex. översättningen av påståendet att teorin är motsägelsefri – inte kan det: det är just innebörden av Gödels andra sats. Gödel själv hade bara skisserat beviset för denna sats. Feferman upptäckte nu ett viktigt *intensionellt* drag hos detta och liknande resultat, lokaliserat till det sätt på vilket egenskapen att vara ett axiom översätts till en aritmetisk formel. Det finns många *extensionellt ekvivalenta* sätt att göra detta. Dvs. det finns ett stort antal aritmetiska formler som har samma extension, nämligen mängden av Gödelnummer på teorins axiom, men som har olika mening eller *intension*. Var och en dessa formler ger upphov till en specifik aritmetisk version av påståendet att teorin är motsägelsefri. Feferman visade att Gödels argument fungerar för speciellt enkla sådana formler, men att man kan välja andra formler så att motsägelsefrihetspåståendet faktiskt blir bevisbart. Detta strider inte mot Gödels resultat, eftersom man i det fallet inte har en korrekt översättning av det informella påståendet att teorin är motsägelsefri, men det problematiserar just vad det innebär att en sådan översättning är korrekt.

I sin doktorsavhandling från 1957 går Feferman långt utöver ett klargörande av innehållet i Gödels satser. Han lägger grunden till en rik teori på detta område, som fortfarande utforskas. Bl. a. visar han att de nämnda icke-standardversionerna av påståenden om motsägelsefrihet långt ifrån är kuriositeter, utan tvärtom kan användas för att visa resultat som på olika sätt stärker Gödels satser. Aritmetisering är numera en standardmetod inom logiken, och den första systematiska undersökningen av dess möjligheter har vi Feferman att tacka för.

Fefermans andra grupp av bidrag är också nära relaterad till ofullständighetssatserna. Om man till en given teori lägger en sann men obevisbar sats, så får man en ny teori, som så att säga är mer fullständig än den gamla. Men Gödels resultat gäller återigen, så det kommer att finnas en annan sann men obevisbar sats i den nya teorin. Och så vidare. Upprepar man denna procedur i det oändliga får man en *progression* av teorier. Progressionen är själv en teori, och man kan fråga om den fångar alla sanna satser i det givna språket. Den frågan är intressant om progressionen är bildad genom att systematiskt lägga till påståenden av samma form. Den antyder ett nytt sätt att "fånga" mängden av sanna aritmetiska satser – enligt Gödels resultat kan denna mängd inte axiomatiseras på det vanliga sättet. Fefermans studium av rekursiva progressioner kring år 1960 är fundamentalt. Det var känt att om man systematiskt lägger till motsägelsefrihetspåståenden, så fångar man till slut alla sanna satser av en viss enkel form. Feferman visade att mer komplexa sanningar inte kan fås på detta sätt, men om man i stället lägger till en viss form av *reflexionsprinciper*, med vilket menas aritmetiserade versioner av påståendet att alla bevisbara satser är sanna, så kan man faktiskt generera den elementära aritmetikens alla sanningar. Han gjorde det, återigen intensionella, begreppet progression precist, och gav den grundläggande teorin för progressioner.

Låt oss till slut återvända till reaktionerna på Russells Paradox. Russell själv menade att den byggde på otillåtna *impredikativa* resonemang. Idén är att det är otillåtet att använda definitioner som är *cirkulära* i den meningen att de förutsätter en domän som innefattar också det objekt som skall definieras. Frågan är hur denna idé skall preciseras, och hur mycket av klassisk matematik som kan rekonstrueras predikativt. En tanke, som också går tillbaka till Russell, är att bygga en hierarki av successivt starkare teorier. Man startar t.ex. med Peanos Aritmetik, och tillåter i första steget bara definitioner som förutsätter domänen av heltal. Därvid kommer vissa *mängder* av heltal att bli definierbara, och i nästa steg låter man också dessa ingå i domänen. Nu blir nya mängder av heltal definierbara, och proceduren kan upprepas i det oändliga. Men sättet att fortsätta i det oändliga måste också uppfylla kravet på predikativitet. Här kom Fefermans teori om progressioner till användning, och 1958 formulerade Georg Kreisel problemet om gränsen för progressioner av detta slag, och därmed gränsen för predikativ matematisk analys.

Detta problem löstes av Feferman år 1964 (och oberoende av honom av Kurt Schütte), då han kunde identifiera det *ordinaltal* som anger precis hur långt denna predikativa hierarki sträcker sig. Studiet av predikativitet pågår än idag, och Feferman har lämnat flera betydelsefulla ytterligare bidrag.